Étude de la disme de Stevin de Bruges

Joël Briand, Marie-Lise Peltier

Étude de la disme de Stevin de Bruges

Joël Briand - Marie-Lise Peltier.

Collaboration de : Jacqueline Euriat - Marie Louise Huet - Raymond Lecoq

1- INTRODUCTION

Une question qui se pose en formation est celle de la construction de situations propices à l'acquisition où/et à la ré-exploration personnelle de savoirs.
La construction de situations d'apprentissage est bien sûr une entrée que nous pratiquons quand cela est possible, mais il est d'autres approches qui méritent notre attention. En particulier, l'approche historique.
L'utilisation d'un texte historique comme autre entrée en formation en mathématiques est pratiquée depuis pas mal d'années. Il s'agit le plus souvent de relire les auteurs anciens à l'aide du savoir actuel et de son organisation.
Parce que l'étude de la genèse historique des savoirs peut éclairer la construction des savoirs chez un individu, cette approche est à la fois attrayante et utile. Toutefois, malgrès la tentation qu'il y aurait à calquer ces deux genèses, les différences demeurent.
Le fait que la construction des nombres décimaux soit historiquement, tantôt une réponse à des questions plutôt mathématiques, tantôt à des questions plutôt d'ordre socio-économiques a retenu notre attention.
Ainsi, dans cet article, après avoir repris brièvement quelques repères historiques concernant les décimaux, nous étudions le document "LA DISME" de Stevin de Bruges, paru en 1585 en édition française.
Cette étude se présente sous forme d'un questionnaire avec des indications de réponses à la suite de chaque question.
L'annexe 1 revient sur le problème de l'extraction de racine carrée, l'annexe 2 propose un glossaire de quelques termes utilisés dans la DISME.

2- REPERES HISTORIQUES CONCERNANT LES DECIMAUX

QUELQUES EXTRAITS DE TEXTES RELATIFS À LA "DÉCOUVERTE" DE STEVIN.

2.1. Histoire universelle des chiffres. *Georges Ifrah* (bouquins Lafont 1994)

"1582- le mathématicien néerlandais Simon Stévin publie son *De Thiende* : c'est le premier ouvrage européen connu consacré à *la théorie générale des fractions décimales*. [ces fractions étaient certes connues bien avant lui : par les arabes, depuis le temps d'Al Uqlidisi (952) ; et en occident par Emmanuel Bonfils de

Tarascon (1350), Regiomontanus (1463), Christophe Rudolff (1525), Elie Mizrachi (1535) et François Viète (1579). Mais à l'exception peut-être du mathématicien musulman Ghiyat ad din Ghamshid al Kashi (première moitié du XVéme), dont les travaux auront été ignorés en occident, personne en dehors de Stevin, n'aura eu l'idée jusque là de substituer ces fractions aux fractions ordinaires et n'aura élaboré de système de notation permettant d'unifier le domaine d'application des règles arithmétiques par un rapprochement avec celles qui s'appliquent aux nombres entiers]".(page 463 tome II)

2.2. Mathématiques et mathématiciens. *P. Dedron, J. Itard* "Les fractions" (Magnard. 1972)

"Les Hindous notaient les fractions comme nous, mais sans la barre horizontale. Les arabes eurent d'abord la même notation qu'eux, puis introduisirent la barre. Le calcul des fractions ordinaires de ces deux peuples étaient dans l'ensemble analogue au nôtre.[...] Cependant ni les Hindous, ni les Arabes, ni les Occidentaux jusqu'à la fin du XVI ème siècle ne se sont aperçus de l'intérêt qu'il y aurait à développer le système décimal de position dans les deux sens, comme les Babyloniens avaient développé leur système sexagésimal. Ce retard provient essentiellement de la perfection même de la numération en base soixante. Adoptée à partir du siècle avant notre ère par les astronomes grecs, conservée par les astronomes arabes (toutes les tables avaient été calculées dans cette base) elle fut utilisée dans les calculs astronomiques jusqu'au XVIIème siècle et est encore utilisée pour les angles et les temps.[...]
Viète, dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579, supplément du *Canon Mathématique*, déclare : "En Mathématiques les soixantièmes et les soixantaines doivent être d'un usage rare ou nul. Au contraire les Millièmes et les Mille, les centièmes et les centaines, les dizièmes et les dizaines, et les progressions de même genre, ascendantes ou descendantes, doivent être d'un usage fréquent ou constant".
La virgule dans la notation de Viète sépare les tranches de trois chiffres du nombre. La partie décimale est écrite en caractères un peu plus petits, et soulignés, le dénominateur 1000 restant sous-entendu. Un peu plus loin dans l'ouvrage, il sépare simplement la partie décimale de la partie entière par un trait vertical.
Le dernier pas est franchi par Stevin, en 1582, dans *De Thiende*, ouvrage traduit en français par l'auteur en 1785 sous le titre *La Disme*."(pages 289, 290)

2.3. La rigueur et le calcul. Documents historiques et épistémologiques. Groupe inter IREM (Cédic, 1982)

"En général, les historiens des sciences attribuent à AL-Kasi l'invention des décimaux. Dans son traité de mathématiques "*Miftah al-hisab*" (la clé de l'arithmétique 1427) qui rassemble l'ensemble des mathématiques élémentaires de son époque, il introduit en particulier les décimaux. On en trouve cependant des traces, en particulier de fractions décimales, chez Al-Uqlidisi.[...]

En Occident, quelques mathématiciens introduisent également les décimaux dans leurs calculs, souvent dans un but de simplification. Citons par exemple Emmanuel Bonfils (1340-1377), et deux siècles plus tard, François Viète dans son *Universalium inspectionum ad Canonem Mathématicum* de 1579. (page 176)

Le traité d'arithmétique de Stevin dans lequel figure *la Disme* témoigne de connaissances des opérations sur les fractions ordinaires analogues aux nôtres (addition de fractions de mêmes dénominateur, multiplication de fractions, réduction au même dénominateur, addition de fractions de dénominateurs quelconques).

2.4. Différentes conceptions historiques des décimaux (G. Brousseau). IREM Bordeaux 1990.

a) Le décimal de l'antiquité sert exclusivement au mesurage et à la représentation des quantités. Par exemple, ceux qui expriment les mesures décimales en Chine treize siècles avant Jésus Christ. Ils fonctionnent à peu près comme les binaires Hiéroglyphiques des Egyptiens de -2500 et comme les sexagésimaux des Babyloniens de -1900, en ce sens qu'ils résolvent de façon similaire des problèmes similaires ; il s'agit de l'emploi direct du système de numération en usage pour les dénombrements comme moyen de décrire des fractionnements : certaines fractions peuvent être désignées, d'autres simplement approchées. Ils se distinguent bien, par toutes sortes de caractères formels, techniques et même sociologiques, des autres fractions avec lesquelles les initiés tentent de faire des calculs exacts, puis de définir la notion de rapport et avec lesquelles on franchit divers obstacles...(passage à la forme 1/m, m naturel quelconque ; puis à n/m, n et m quelconques, etc.) Bien entendu, peu de ces propriétés sont reconnues même si elles sont utilisées. Je dirai - en empruntant ce terme à Y.CHEVALLARD (1981) - que le décimal est alors une notion protomathématique : cette structure est mobilisée implicitement dans des usages et des pratiques, ses propriétés sont utilisées pour résoudre certains problèmes, mais elle n'est pas reconnue, ni comme objet d'étude, ni même comme outil.

b) Al Huwarizmi (780-850), unifie le calcul des naturels avec celui des rapports géométriques, et introduit l'emploi de la numération de position décimale, et rend possible l'émergence du décimal - outil d'appropriation, non plus des grandeurs, mais des entités mathématiques : rationnels d'abord, puis radicaux, etc. Ces entités sont susceptibles d'être des nombres dénombrants, des nombres mesurants, des rapports et enfin, avec STEVIN (1585) d'authentiques applications.
Le décimal devient alors une notion paramathématique : il n'est tout d'abord qu'un outil consciemment utilisé, reconnu, désigné, mais que son inventeur Al Uqlidisi, vers 952, ne traite pas comme objet d'étude. (Abd el Jaoud 1978). Le décimal est montré dans son fonctionnement (préconstruit) et apparaît comme une méthode d'exposition des fractions ou une curiosité. (L'écriture des fractions décimales dans l'oeuvre d'AL Aqlidisi est identique à la nôtre). Pourtant le concept n'est pas repris par ses contemporains.

Au contraire, son deuxième inventeur, Al Kashi (1427) le reconnaît comme une découverte mathématique. Le décimal n'est pas encore sous le contrôle d'une théorie qui en fixe la définition. Les propriétés et la position épistémologique. Il est la traduction du système sexagésimal des astronomes, en un système plus commode pour les calculs. On peut supposer que pendant 5 siècles, les décimaux sont potentiellement présents dans la culture et que c'est leur statut qui est en évolution (par exemple, Bonfils de Tarascon vers 1530 en produit une ébauche.)

c) C'est avec Simon STEVIN (1585) que le décimal accède au statut de notion mathématique. Stevin introduit systématiquement les nombres géométriques et multinomiés -les fonctions polynômes- pour unifier la notion de nombre et les solutions des problèmes d'algèbre de son époque. Les décimaux apparaissent comme une production achevée de cette théorie ; ils deviennent alors un objet de connaissance susceptible d'être enseigné et utilisé dans les applications pratiques, les calculs, les constitutions de tables. Leur rôle conceptuel reste plus caché. Pour STEVIN, « les quantités irrationnelles, irrégulières, inexplicables, sourdes et absurdes » sont des nombres réels parce que toutes sont approchables par des nombres décimaux ; il n'a pas écrit cette phrase, mais se passe comme s'il l'avait pensée.
Les décimaux servent de modèle heuristique dans l'analyse naissant et Newton les utilise pour expliquer l'approche des fonctions et de leurs fluxions à l'aide des fonctions polynômes et des séries, de leurs dérivées et de leurs primitives (Ovaert 1976). Cette place n'est finalement fixée et attestée que lorsque les réels sont enfin devenus à leur tour des objets mathématiques et que les procédés d'approche des fonctions qu'utilisait STEVIN ont reçu à leur tour leur identité mathématique.

2.5. DEUX REFERENCES BIBLIOGRAPHIQUES HISTORIQUES

DIJKSTERHUIS E.J. « *SIMON STEVIN science in the Netherlands around 1600* ».. Ed. Martinus NIJHOFF / The HAGUE. 1970.
VAN BEMMEL : « *PATRIA BELGICA-encyclopédie nationale.* ». Ed. Bruylant-Christophe. 1875.

3. QUESTIONNAIRE SUR LA DISME

3.1. Questions relatives à l'introduction

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Dans le texte introductif intitulé « AVX ASTROLOGUES, arpenteurs, mesurevrs de tapisserie, gavievrs, stéréométriens en général, Maîtres de monnoye, & à tous marchans » , pointez les étapes de l'argumentation de STEVIN et la nature de chacun des arguments.	Après une déclaration de modestie (vraie ou fausse) l'auteur argumente en se fondant sur les pratiques sociales : "*Mais s'il est arpenteur, il saura le grand bénéfice que le monde reçoit de la science, par laquelle s'évitent plusieurs difficultés et noises, qui s'élèveraient journellement, à cause de l'inconnue capacité des terres"* Argument de simplicité : "*Elle enseigne (afin de dire beaucoup en un mot) d'expédier facilement sans nombres rompus, tous comptes qui se rencontrent aux affaires des Humains. De sorte que les quatre principes d'Arithmétique que l'on appelle Ajouter, Soustraire, Multiplier et Diviser par nombres entiers pourront satisfaire à tel effet. Causant semblable facilité à ceux qui usent des jetons. Or ainsi par tel moyen sera gagné le précieux temps..."* Il justifie l'utilité en se servant de l'usage qu'en font déjà les arpenteurs : "*Quand à ce que quelqu'un ne pourrait dire que plusieurs inventions semblent bonnes au premier regard, mais quand on s'en veut servir, l'on ne peut rien effectuer, et comme il advient souvent aux chercheurs de forts mouvements qui semblent bons en petites preuves mais aux grandes, ou à l'effet, ils ne valent pas un fétu. Nous lui répondons qu'il n'y a ici tel doute, parce que l'expérience s'en fait journellement en la chose même. A savoir par divers experts Arpenteurs Hollandais auxquels nous l'avons déclaré, lesquels (laissant ce qu'ils avaient inventé chacun à sa manière, pour amoindrir le travail de leur computation) l'usent à grand contentement..*

On peut introduire les décimaux pour plusieurs raisons. Quelle est la raison invoquée ici ?	Ce sont les décimaux comme système de notation rendant les opérations aisées entre rationnels décimaux. Ce ne sont pas les décimaux pour les approximations, du moins ici, mais on y reviendra plus en avant dans le document.
Recensez les savoirs de l'époque qui sont évoqués dans cette introduction. (Séparez pratiques sociales et savoirs des mathématiciens).	Il s'agit des opérations dans les fractions (les problèmes du livre d'Arithmétique). STEVIN y fait sans cesse allusion. Mais pour son argumentation, STEVIN se réfère aux pratiques de calcul plus familières dans les fractions décimales.
STEVIN dévoile-t-il son "invention" dans l'introduction ? Quelles sont ses préoccupations ?	Non, il montre son intérêt pour les affaires des hommes. Il expose les difficultés actuelles. Il a pour souci de montrer que son invention s'adresse à tous et est crédible : elle s'adresse autant aux manieurs de jetons qu'aux comptables effectuant les calculs les plus élaborés, et des corporations telles les arpenteurs l'utilisent déjà "à leur grand contentement".
A quoi correspond le paragraphe nommé *"argument"* en termes actuels ?	Il s'agit du plan qui s'adresse aux mathématiciens. L'usage à destination des corporations est relégué en Appendice.

3.2.Questions relatives à la premiere partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Quel est l'objet de la définition 1 et de l'explication qui la suit ? Donnez en termes actuels le principe sur lequel s'appuie cette définition. Comment s'y prend-t-il pour préparer le chiffre des dixième ?	C'est de présenter globalement la Disme comme un traité d'arithmétique qui va s'appuyer sur la numération décimale. La définition s'appuie sur la numération en base dix. Il fait relire un nombre selon l'ordre gauche droite et non droite gauche afin de préparer aux définitions 2, 3 et 4. (division et non groupement échange).
Comment s'y prend-t-il pour donner du sens au mot "dixième" ?	Il montre : il fait faire une relecture et remplace la lecture droite gauche (dizaine) par une lecture gauche droite (dixième).

La définition 3 montre que STEVIN se fonde sur un ensemble de savoirs communs aux "professionnels des calculs" de son époque. Quels sont ces savoirs ? Faites une hypothèse sur la manière dont on écrivait, à cette époque, les nombres non entiers ? Comment s'articule son invention à partir de ces savoirs ? Il propose une écriture. Quelles sont les règles précises qu'il impose à ce moment de l'exposé ? Réécrivez : 73 2745/10000 8 907/1000 Comparez à notre notation actuelle.	Il s'appuie sur les fractions. Dans celles-ci, il fonde véritablement les fractions décimales, organise leur décomposition pour décrire son partage en dix, même si celles-ci existaient déjà. On écrivait les nombres non entiers comme 8 937/1000 Il propose l'écriture en 8 9/10 3/100 7/1000, justifie sa présentation par une recomposition et non une décomposition. Le numérateur ne peut exéder 9. Remarque : pour justifier une convention d'écriture, il faut partir des habitudes sociales. (Et non pas l'amener). Il a besoin de l'addition des fractions pour justifier sa notation. Remarque : l'écriture des nombres ne se sert pas de l'addition. Les deux exercices visent à montrer que la question du Zéro intercalaire n'est pas réglée.
A partir des définitions 1 et 4, précisez en quoi consiste finalement l'"Invention" ?	Cette invention est une convention d'écriture. Elle conduit à la création d'un nouvel ensemble des nombres nommé *"les nombres de Disme"*, strictement inclus dans l'ensemble des rationnels.

3.3. Questions relatives à la seconde partie

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin

Sur quelles pratiques de l'époque s'appuie STEVIN pour justifier sa façon de faire ?	STEVIN fait référence à une pratique de l'addition des rompus
Quel est le rôle du nota de l'addition ?	Le résultat posé dans l'addition 1 conduit STEVIN à présenter le cas des nombres pour lesquels certains groupements sont absents et à préciser la notation.
L'exposé de la multiplication se fait en deux temps : le premier et le nota. Etudiez leur rôle respectif et explicitez le choix pédagogique. A quel savoir actuel le nota vous fait-il penser ? Comment la règle de découverte du nombre de chiffres après la virgule est elle abordée ?	On fait le produit de deux nombres de même format, ce qui permet d'utiliser la démonstration classique avec retour aux rompus et au produit de rompus. Dans le nota, il s'agit du produit de deux nombres qui n'ont pas le même format. Il explicite un nouveau procédé et adapte une nouvelle présentation. Dans le premier exemple, les unités de même rang sont en colonne. Dans le nota ce n'est plus le cas. Le produit des puissances négatives de dix permet d'éclairer le nota. ll effectue une démonstration à partir d'un nombre à 2 chiffres multiplié par un autre nombre à 2 chiffres après la virgule...
La division : Retrouvez, à partir de la présentation de 3,44352 divisé par 0,96 la façon dont une division est effectuée à l'époque.	
Expliquez pourquoi STEVIN propose de "mettre quelques 0 après le 7" dans le NOTA I	Il s'arrange toujour pour avoir un nombre plus grand afin que la soustraction des rangs donne toujours un nombre positif. Le contrôle ultérieur se fait.

A quel moment STEVIN aborde l'écriture décimale illimitée d'un rationnel non décimal ?	Dans l'extrait suivant : "le quotient ne se pourra expliquer par nombres entiers, comme 4①, divisées par 3②, en cette sorte :Là où il apparaît qu'il y en sortiront infiniment des trois, restant toujours $\frac{1}{3}$, STEVIN met en évidence les limites de la DISME.
Quelle propriété de D aborde-t-il ?	Il sait que l'approche de tels nombres est réalisable quelque soit l'exigence de proximité : "...approcher si près, comme la chose le requiert, omettant le résidu". Il signifie par là même la densité de **D** dans **Q**
Quelle convention d'écriture d'un rationnel écrit-il ?	Il propose une écriture "multinomiée" : " Il est bien vrai que 13⓪3①3$\frac{1}{3}$② ou 13⓪3①3②3$\frac{1}{3}$③,etc. serait le parfait requis"...
Comment justifie-t-il l'insuffisance des écritures décimales ?	Il se fonde sur les exigences professionnelles de l'époque : "..., mais notre intention est d'opérer en cette Disme, par nombres tous entiers, car nous voyons à ce qui s'observe aux négoces des hommes, là où l'on ne fait point compte de la millième partie d'une maille, d'un grain, etc. comme le semblable est souvent usé par les principaux Géométriens & Arithméticiens, en comptes de grandes conséquences. Comme Ptolémée & Jehan de Montroyal, n'ont pas décrit leurs tables des Arcs et Cordes, ou des Sinus, par l'extrème perfection (combien il était possible de le faire par nombres multinomiés) à cause que cette imperfection (considérant la fin d'icelles tables) est plus utiles que telle perfection."

NOTA 2 :A PROPOS DE L'EXTRACTION DES RACINES CARRÉES L'exemple choisi est l'extraction de la racine carrée de 0,0529. De quelle manière Stevin détermine le rang du dernier chiffre de la racine carrée ?	Stevin utilise la propriété : la racine carrée de 10^{-2n} est 10^{-n} Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est pair, le rang du dernier chiffre de la racine est la moitié de ce rang Si le rang du dernier chiffre décimal du nombre est impair, on se ramène au cas précédent en considérant le rang suivant. (Voir etude de l'algorithme de l'extraction de la racine carrée d'un entier dans la suite de ce document.)
Quel algorithme est ensuite proposé ?	L'algorithme d'extraction de la racine carrée pour les nombres entiers .

3.4. Questions relatives a l'appendice

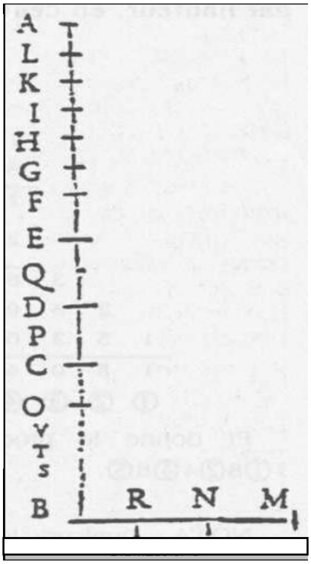
ARTICLE I : DES COMPUTATIONS DE L'ARPENTERIE :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Citez une phrase du premier paragraphe qui semble montrer que le mot *verge* désigne ici une unité de longueur.	*"... la plupart des arpenteurs n'usent pas de verge ains d'une chaîne de trois, quatre ou cinq verges"*
2. Quels sont les instruments de mesure de longueur dont parle ici Stevin ?	*La chaîne de trois, quatre ou cinq verges, le bâton de la croix rectangulaire qui porte des pieds et des doigts, et la verge (sans doute règle d'une longueur d'une verge) qui porte des graduations en pieds et doigts (sous-multiples de la verge).*
3. Quelles modifications Stevin conseille-t-il aux arpenteurs concernant leurs instruments ? Dans quels buts ?	*Graduer le bâton en Primes et Secondes au lieu de pieds et de doigts pour mesurer directement en verges, primes et secondes, et graduer la verge (règle) en pieds et doigts sur un autre côté, mais bien en face, pour montrer au client ce que représentent des primes et des secondes en pieds et doigts.*
4. Pourquoi diviser la verge en Primes et Secondes, plutôt qu'en pieds et doigts comme le voulait la coutume ?	*Pour utiliser au maximum la numération décimale prolongée sur la gauche que Stevin vient d'exposer : en effet on ne sera pas obligé de faire des opérations sur des nombres complexes, ce qui était la règle jusque là, ou de calculer sur des fractions*

5. Dans le premier exemple numérique, Stevin dit ajouter des superficies ; il trouve 2790, 59 verges ; le mot *verge* désigne donc ici une unité de superficie. Comment alors comprenez-vous la phrase : "Mais si l'on veut savoir combien de pieds et de doigts font les 5 (1) 9 (2) (ce que l'arpenteur ne fera qu'une fois, à la fin du compte qu'il livre aux propriétaires, combien que la plupart d'eux estiment inutile d'y faire mention de pieds ou doigts) on verra sur la verge combien de pieds et doigts (qui sont marqués joignant les dixièmes parties sur un autre côté de la verge) s'accordent aux mêmes." ? Comment l'arpenteur s'y prendra-t-il pour faire voir les 5 dixièmes 9 centièmes de verge superficielle ?	*On peut penser qu'une verge superficielle est l'aire d'un carré de une verge linéaire sur une verge linéaire. Dans ce cas le dixième de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur un dixième de verge et cinq dixièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur cinq dixièmes de verge. On peut montrer la largeur de ce rectangle aux propriétaires sur la verge (règle), et on peut lire en face cette largeur en pieds.* *De même 9 centièmes de verge superficielle est l'aire d'un rectangle de une verge sur 9 centièmes de verge. Cette dimension pourra donc être montrée sur la verge, et en face l'équivalent en doigts.*
6. Traduisez en langage moderne le problème donné au quatrième exemple. Pourquoi dit-il : "bien qu'il ne me semble pas besoin" ?	*On a une parcelle rectangulaire ABCD, dont le côté AD mesure 26,1 verges. On veut enlever de cette parcelle un petit rectangle de côté AD et d'aire 367,6 verges. On demande la longueur de la deuxième dimension du petit rectangle.* *La verge linéaire servant à mesurer des terrains, elle doit être de l'ordre du mètre. Aller au-delà des centièmes de verge linéaire n'a donc pas de sens sur le terrain.*

ARTICLE III, DES COMPTES SERVANT A LA GAVERIE & AUX MESURES DE TOUS TONNEAUX.

La figure présentée dans le document original est complexe à analyser. Ce qui suit n'est donc pas rédigé sous forme d'un questionnaire. Voici quelques pistes :



Rappel; : L'unité est une âme, c'est à dire 100 pots.

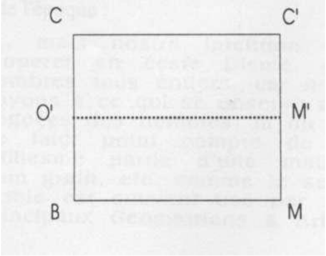
La première subdivision en 10 donne une graduation irrégulière « égale au respect du vin ». Elle se fait « selon la coutume » et a sans doute un caractère expérimental. Cette irrégularité est livrée à la forme du tonneau.

Stevin propose d'obtenir les subdivisions suivantes par un procédé purement géométrique en deux étapes à chaque fois.

- D'abord partage en 2 de chaque subdivision.
- Ensuite, partage en 5 de chacune des deux parties obtenues.

Le tonneau n'étant pas un cylindre, Stevin fonde sa méthode sur la moyenne proportionnelle. (Voir plus bas).

Partage en 2 de [OC].
Si le tonneau était un cylindre, la graduation correspondant au partage en deux se trouverait au milieu de [BC].



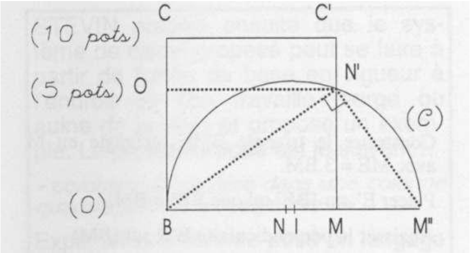
Le tonneau n'est pas un cylindre.
On admet que [BO] correspond au côté d'un carré ayant même aire que le rectangle BO'M'M, ce que Stevin énonce en disant :

« BO égale à BN, est la ligne moyenne proportionnelle entre BM et sa moitié ».

$\dfrac{BM}{BN} = \dfrac{BN}{\dfrac{BM}{2}}$ d'où $BN^2 = \dfrac{BM^2}{2}$ et $BN = BM\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$MM'' = \dfrac{MB}{2}$; I milieu de BM''. C demi-cercle de diamètre BM''» coupent [MC'] en N'. D'après les propriétés du triangle rectangle : $MN'^2 = MB \times MM''$ $= MB \times \dfrac{MB}{2} = \dfrac{MB'}{2}$

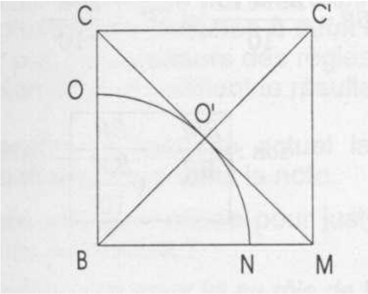
soit $MN' = \dfrac{BM\sqrt{2}}{2}$



Autre méthode (par la diagonale du carré BMC'C).

$BC = BM\sqrt{2}$

$BO' = \dfrac{BM\sqrt{2}}{2} = BN = BO$



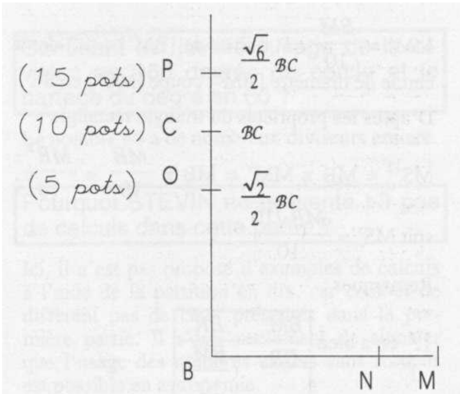
Remarque : calcul de NO

BNO triangle rectangle isocèle de sommet B donc $NO = BN\sqrt{2}$

$= \left(\dfrac{BM\sqrt{2}}{2}\right)\sqrt{2} = BM$

Stevin conclut : « ... et **si NO suit alors égale à BC, l'opération est bonne**. »

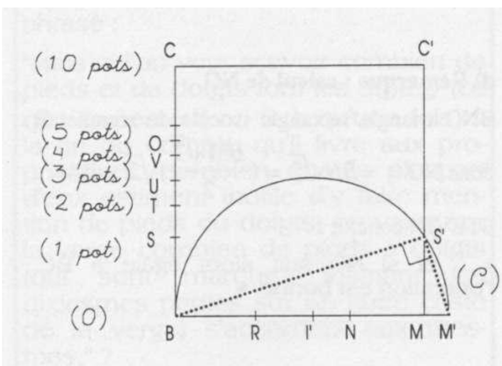
Début de la graduation :



BN donne BO correspondant à 5 pots.
NO donne BC correspondant à 10 pots.
NC donne BP correpondant à 15 pots.
BD est fourni par l’expérience (20 pots).
ND donne BQ correspondant à 25 pots,
etc.

Partage en 5 de [BO] et [OC].

a) Méthode classique de la recherche de la moyenne proportionnelle :



MM’’ = $\frac{BM}{10}$: I’ milieu de [BM’’]. C demi cercle de diamètre [BM’’] coupent [MC’] en S’. D’après les propriétés du triangle rectangle :

MS’2 = MB x MM’’ = MB x $\frac{MB}{10}$ = $\frac{MB^2}{10}$, soit MS’ = $\frac{MB\sqrt{10}}{10}$.

Remarque : 1°) on a bien $\boxed{\dfrac{BM}{BR} = \dfrac{BR}{(\dfrac{BM}{10})}}$

2°) BT = RS = $\sqrt{BR^2 + BS^2} = \dfrac{\sqrt{20}}{10}$BM

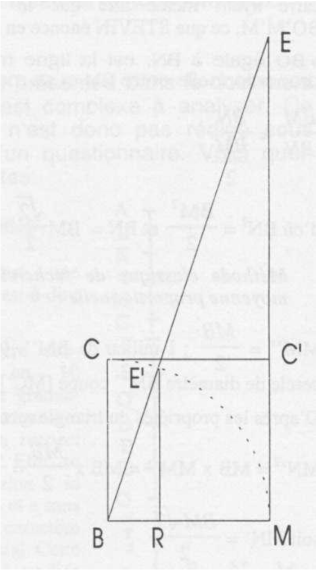
BU = RT = $\sqrt{BR^2 + BT^2} = \dfrac{\sqrt{30}}{10}$BM

BV = RU = $\sqrt{BR^2 + BU^2} = \dfrac{\sqrt{40}}{10}$BM

BO = RV = $\sqrt{BR^2 + BV^2} = \dfrac{\sqrt{50}}{10}$BM = $5\dfrac{\sqrt{2}}{10}$ BM = $\dfrac{BM\sqrt{2}}{2}$

etc.

b) Autre méthode utilisant le théorème de Thalès et le théorème de Phytagore :



Construire le triangle BME rectangle en M avec ME = 3 BM. Placer E' sur [BE] tel que BE' = BM. Abaisser laperpendiculaire E'R sur (BM)

BE = $\sqrt{BM^2 + 9BM^2}$ = BM$\sqrt{10}$

$\dfrac{BE'}{BE} = \dfrac{BR}{BM}$ soit $\dfrac{BM}{BM\sqrt{10}} = \dfrac{BR}{BM}$

soit :

$$\boxed{\frac{BM}{BR} = \frac{BR}{(\frac{BM}{10})}}$$

<u>ARTICLE IV,</u> DES COMPTES DE LA STÉRÉOMÉTRIE EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
L'article IV, en relation avec l'article III peut permettre d'aborder les liens entre le général et les cas particuliers :	
1. Pouvait-on se passer de l'article III et trouver les renseignements de résolutions des problèmes posés dans cet article à l'aide des conclusions du cas général de l'article IV ? *(on peut penser à l'analogie avec l'étude de la proportionnalité et étude des échelles et pourcentages à l'école élémentaire).*	Stevin situe les différences et liens entre cet article et le précédent, en précisant que la stéréométrie est plus générale que la gaujerie et qu'elle doit être étudiée séparément. *« gaujerie est stéréométrie »,... « toute stereometrie n'est pas gaujerie »*
2. Stevin précise ensuite que le système de calcul proposé peut se faire à partir de l'unité de base en vigueur à l'endroit où l'on travaille (verge ou aulne de la ville) et propose un exemple : problème posé : *« combien de matière dans une colonne quadriangulière rectangulière ? »* Exprimer le problème posé en langage actuel.	Calculer le volume d'un pavé de dimensions 0,32 x 0,24 x 2,35

3. L'article se termine par une explication supplémentaire destinée à ceux qui ne sont pas connaisseurs des règles de la stéréométrie et justifiant le résultat. Présenter en langage actuel la convention exprimée dans la note.	La verge en volume diffère de la verge en longueur : 1 verge correspond à 1000 cubes de côté 0,1 ; en conséquence de quoi 0,1 verge en volume correspond à 100 cubes de côté 0,1.
Quelle aide est utilisée pour justifier la lecture du résultat ? *(on peut s'intéresser ici au rôle de la référence à des situations connues pour éclairer une nouvelle connaissance)*	Pour développer ce fait, l'analogie est faite avec ce qui est connu pour les arpenteurs et le calcul de la superficie.

<u>ARTICLE V :</u> DES COMPUTATIONS ASTRONOMIQUES

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
Qu'est-ce qu'un "nombre mesurable par mesures entières" selon STEVIN ?	C'est l'ensemble des diviseurs de ce nombre.
Comment est justifié l'usage de la division en 360 degrés du cercle et le partage du degré en 60 ?	Le nombre 60 a de nombreux diviseurs entiers.
Pourquoi Stevin ne présente t-il pas de calculs dans cette partie ?	Ici, il n'est pas proposé d'exemples de calculs à l'aide de la partition en dix, car ceux-ci ne diffèrent pas de ceux présentés dans la première partie. Il s'agit seulement de signaler que l'usage des nombres entiers sans rompus est possible en astronomie.
Quelles analogies et quelles différences faites vous entre la proposition de STEVIN et celle de la convention à la fin du XVIII° siècle ?	STEVIN conserve les 360° alors que la convention va instaurer le grade et les 400 grades du cercle. (Sans succès à long terme). Sur l'appendice on ne parle que des nombres "degrés décimaux" (à relier avec l'heure décimale).

ARTICLE VI, DES COMPTES DES MAISTRES DES MONNOIES, MARCHANS ET DE TOUS EN GÉNÉRAL :

Questions	Réponses apportées dans le texte de Stevin
1. Préciser les situations où la règle présentée est applicable et comment il est prévu de prendre en compte les différentes unités de mesure en vigueur.	Tout d'abord, il est précisé que le contenu de cet article concerne n'importe quelle unité monétaire (l'unité de base utilisée sera celle en vigueur dans la ville où l'on se trouve) et que tout calcul se fera en utilisant la partition en 10 des unités de mesure utilisées par les marchands (unités de longueur, de capacités pour les liquides ou de capacités pour les matières sèches, unités de poids). On choisit l'unité de commencement, en fonction de la valeur monétaire utilisée ; puis, on relie les différentes unités de la mesure que fait le marchand (ici le poids) et la place des chiffres et du signe associé dans l'écriture sans rompus ; c'est ainsi que pour les poids on crée des subdivisions de poids de 0,5 ; 0,3 ; 0,2 et 0,1. permettant de peser en prime de livre, puis on divise à nouveau en dix pour peser en seconde de livre, etc..
2. Deux problèmes sont ensuite résolus comme démonstrations de l'usage de cette nouvelle façon de calculer : Sachant que 1 marc d'or vaut 36,53 livres, combien valent 8,354 marcs ? Si 2,3 aulnes coûtent 3,25 livres, que coûtent 7,53 aulnes ? Que penser du nombre et du choix des exemples choisis par Stevin ? *(on peut s'interroger ici du rôle des exemples (choix et nombre) pour dégager une règle générale.)* Étudier la démarche de résolution	Selon Stevin les deux exemples précédents suffisent à prouver que l'usage des nouveaux nombres et calculs est fort commode pour les marchands.

des problèmes posés (en particulier la façon de résoudre le problème de proportionnalité et la technique de construction de la règle de trois).	

CONCLUSION :

Dans la conclusion, Stevin exprime la différence qui peut être établie entre l'article 6 et les autres : il s'agit de l'usage social : Pour ce qui concerne la monnaie, il est nécessaire que la solution trouvée soit légitimée. C'est pourquoi il s'adresse aux autorités qui devraient permettre que l'usage de cette nouvelle partition des mesures s'ajoute à l'usage des partitions en vigueur. La proposition sera utile aux successeurs qui ne négligeront pas toujours les avantages de cette nouvelle méthode. Les hommes peuvent se transmettre entre eux ce nouveau savoir. Si l'utilité du sixième article n'est pas reconnue, il est toutefois possible d'utiliser les cinq autres.
La conclusion peut apporter l'occasion d'une réflexion plus générale sur le métier d'enseignant : - Comment transmettre un savoir nouveau ? ou Comment modifier les habitudes ? - Comment concilier anciennes habitudes et nouvelles techniques ? - Comment légitimer un nouveau savoir ?

3.5.Questions relatives a la démonstration chez Stevin

la Disme : questions sur ce que Stevin nomme démonstration	
1. Quel objectif se propose Stevin dans toute la seconde partie de la Disme ?	*de montrer que l'on peut opérer sur les nombres de Disme comme sur des entiers à quelques contraintes simples près, et que ce qu'on trouve en manoeuvrant ainsi correspond bien à ce qu'on aurait trouvé en utilisant des rompus.*
2. Dans la seconde partie de la Disme, Stevin pose quatre problèmes : lesquels ?	*Etant donnés nombres de Disme à ajouter : Trouver leur somme.* *Etant donnés nombres de Disme duquel on soustrait, et à soustraire : Trouver leur reste.* *Etant donnés nombres de Disme à multiplier et multiplicateur : Trouver leur produit.* *Etant donnés nombres de Disme à diviser et diviseur : Trouver leur quotient.*

3. Pour résoudre ces problèmes, Stevin annonce cinq étapes à chaque fois : explication du donné, explication du requis, construction, démonstration et conclusion. a) Caractérisez d'une phrase chacune des trois premières étapes.	*L'explication du donné consiste à présenter l'exemple numérique choisi. L'explication du requis consiste à présenter ce qu'on cherche. La construction consiste à présenter les actions simples à exécuter sur les nombres de Disme (actions que le lecteur n'a pas à faire : l'opération est présentée à côté).*
b) Quel choix didactique Stevin fait-il pour convaincre son lecteur de la validité de ce qu'il avance ?	*Il choisit de montrer que cela fonctionne sur un exemple numérique compliqué. Il se contente de montrer l'équivalence des écritures dans des cas particuliers.*
c) Pourquoi n'accepterait-on pas aujourd'hui de nommer "démonstration" sa démarche ? Quels noms pourrait-on utiliser pour la caractériser ?	*Aujourd'hui, dans le monde des mathématiciens, on se méfie des particularités ; on se dit (et on a des contre-exemples nombreux pour justifier cela) qu'un procédé qui réussit sur un exemple ne réussit pas nécessairement dans tous les cas ; on exige donc des calculs plus généraux, par exemple au moyen de lettres. On parlerait plutôt dans ce cas-ci de l'illustration d'un mécanisme sur un exemple. Pour un public non spécialiste, cela peut représenter une preuve convaincante.*
d) Quels arguments Stevin donne-t-il pour étayer ses "démonstrations" ?	*-ses propres définitions (références à la première partie de la Disme)* *-des références aux "problèmes de l'Arithmétique" (sans doute un ouvrage connu)*
e) Comment choisit-il ses exemples numériques ? Dans quel but ?	*Il les choisit assez compliqués de manière à envisager sur un seul exemple tous les cas difficiles.*

3.6. Questions de synthese

la Disme : questions de synthèse	
1. Donner les grandes idées de l'introduction de la Disme. En quoi les arguments de Stevin sont-ils habiles ?	*La disme est une proposition toute simple, mais très utile.* *La vie professionnelle est souvent compliquée par de laborieux calculs, dont la moindre erreur risque de porter préjudice à son auteur.* *La disme enseigne "d'expédier facilement sans nombres rompus tous comptes", comme si on opérait sur des entiers. Donc temps gagné, et soucis ôtés.* *La disme a déjà été expérimentée par des arpenteurs hollandais et ils en sont très contents.* *Il s'adresse, non pas à des mathématiciens, mais à des gens pour lesquels sa proposition serait vraiment utile. Il insiste sur la simplicité de la Disme, son utilité, et pas du tout sur le fait qu'il faut bousculer toutes ses habitudes si on veut vraiment l'exploiter dans son métier.*
	Il prévient justement toute réflexion à ce sujet en annonçant que des arpenteurs s'y sont déjà mis et en sont très contents.
2. Stevin s'adresse à des publics divers. Différencie-t-il ses explications selon les publics ? Argumentez votre réponse.	*Dans l'article III de l'appendice, il fait une démonstration qui manifestement s'appuie sur des connaissances de spécialistes en gaugerie ; et il dit "Nous avons fait la démonstration brève, parce que nous n'écrivons pas à Apprentis mais à Maîtres."* *Dans le Nota de l'article IV, : il dit "Quelqu'un ignorant (car c'est à celui-là que nous parlons ici) les fondements de la stéréométrie, ..."* *Dans le Nota de la proposition IV, on peut penser qu'il s'adresse à des mathématiciens quand il montre que certains nombres ne peuvent pas s'écrire en nombre de Disme, et aussitôt, il balaie ces nombres-là car dans les affaires des hommes, on n'a pas besoin d'une très grande précision.*

3. Essayez en quelques phrases de préciser les objectifs de Stevin et comment il s'y prend pour les atteindre..	*Il veut être compris de tous. Il veut donner à tous l'envie d'essayer sa méthode. Il veut que les gens abandonnent les sous multiples en douzième ou en quart, pour adopter les dixièmes, centièmes. Il aimerait aussi convaincre les "décideurs" au sujet des mesures officielles.* *Il multiplie les exemples pour faire comprendre ses définitions. Il se donne le mal de montrer comment on fera les quatre opérations, et même les racines carrées, toujours sur des exemples. Les petites difficultés sont vues dans les nota, sur des exemples.* *Il prend soin de s'adresser séparément aux différents corps de métier, pour ne pas ennuyer les uns avec les problèmes des autres.* *Et comme il sait que la force des habitudes est grande, il cherche à suggérer le moins de changements possibles : ainsi dans tous les corps de métier on gardera l'unité principale ; on ne changera que les sous multiples.*
4. Comment s'arrange-t-il pour que chacun puisse ne lire que ce dont il a besoin ?	*Il fait des paragraphes différents pour les différents métiers.*
5. Stevin se rend compte que ses suggestions (dans l'appendice) vont bouleverser des habitudes. Comment s'y prend-il pour atténuer cet effet ?	*Il indique des modifications minimes des instruments. Il insiste souvent sur le fait qu'on n'a pas besoin d'une très grande précision. Il donne des indications pour modifier les graduations non régulières de la gauge. Il aide à s'y retrouver pour les mesures d'aire ou de volume.*

3.7. A propos des unités dont il est question dans la disme

Mesures de tapisseries : l'aulne (origine latine ulna "avant-bras") : 3 pieds 7 pouces 8 lignes soit 1,118m

Mesures de tous tonneaux : l'âme : 100 pots. un pot : 2 pintes. une pinte : 2 chopines soit environ 0,93L

4. ANNEXES

4.1. Annexe 1 Etude de l'algorithme d'extraction de la racine carrée d'un entier.

4.1.1. Disposition du XVI$^{\text{ème}}$ siècle

216

INSTRUCTION.

La *Racine quarrée* eſt fort peu différente de la Diviſion; il faut ſeulement ſavoir la Table de multiplication quarrée qui eſt ici à côté.

Suppoſez qu'il fallût extraire la racine du nombre 119029, poſez ledit nombre comme ſi vous le vouliez diviſer; mais il faut faire une ſéparation de deux en deux figures en reculant, & venant de droite à gauche, ainſi que vous voyez que j'ai fait à ces trois Exemples, quoiqu'il ne faille qu'une ſeule Regle.

Il faut commencer votre Regle à gauche, diſant la racine de 11 eſt 3. Poſez ce 3 en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* 11 *pour ſervir de diviſeur.* Diſant 3 fois 3 font 9, de 11 reſte 2 qu'il faut poſer ſur 11 en coupant ledit 11.

Voyez le premier Exemple.

Cela fait, doublez le 3 du produit & ce double 6 ſera la premiere figure de votre ſecond diviſeur que vous mettez ſous le 9, diſant en 29 combien de fois 6, il y eſt 4, qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine, & ſous le* o *pour ſervir de diviſeur*, ainſi ayant diviſé 290 par 64, reſtera 34 en haut.

Voyez le ſecond Exemple.

Enfin, Il faut toujours doubler le produit tel qu'il ſoit pour ſervir de diviſeur. Vous direz donc à 34 deux fois 4 font 8 qu'il faut poſer ſous le 2, & 2 fois 3 font 6 qu'il faut poſer ſous le 4 diviſeur précédent.

Après, dites en 34 combien de fois 6, il y eſt 5 fois qu'il faut mettre en *deux endroits, au produit pour ſervir de racine totale, & après le* 8 *pour ſervir au dernier diviſeur*, ainſi votre derniere diviſion étant faite, vous trouverez que 119029 auront pour racine 345.

La preuve ſe fait en multipliant les 345 de racine par 345, viennent en y ajoutant le 4 de reſte les 119029 dont on a extrait la racine quarrée.

DE

217

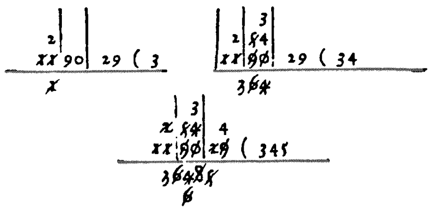
DE LA RACINE QUARRÉE.

Racine quarrée eſt un nombre, lequel étant multiplié par lui-même, produit ſon quarré juſte.

Preſque tous les Auteurs qui en ont traité forment la Table ſuivante d'une autre maniere; mais celle-ci eſt la plus familiere & la plus facile, parce qu'elle eſt plus conforme au Livret de la Multiplication qui en eſt le fondement; auſſi voyez au petit Livret, feuillet 40, *& au grand, feuillet* 43, *& vous trouverez la racine & ſon quarré à toutes les premieres lignes.*

Racine.		Quarrée.
1	*eſt la racine de*	1
2	*eſt la racine de*	4
3	*eſt la racine de*	9
4	*eſt la racine de*	16
5	*eſt la racine de*	25
6	*eſt la racine de*	36
7	*eſt la racine de*	49
8	*eſt la racine de*	64
9	*eſt la racine de*	81

EXEMPLES.



Maxime générale pour les reſtes, il faut mettre le haut pour le deſſus de la Fraction, & doubler le produit 345, mais y ajouter 1, & ſera le deſſous de la Fraction qui ſera $\frac{4}{691}$, qui n'eſt preſque rien.

T

4.1.2. Disposition actuelle

Nous prenons le même exemple que celui proposé dans le document joint.

Considérons le nombre 119029.
Il est compris entre 10^5 et 10^6, sa racine est donc entre 100 et 1000, elle a trois chiffres et peut donc s'écrire 100c+10d+u

On cherche donc à déterminer c, d, u tels que

$$
\begin{aligned}
&= (100c+10d+u)^2 + \alpha \quad \text{avec } \alpha \text{ petit.} \\
&= 10000c^2+2\times100c\times10d+100d^2+2\times100c\times u+2\times10d\times u+u^2+\alpha \\
&= 10000c^2+(2\times10\times c+d)\times d\times100+[2\times(100c+10d)+u]\times u+\alpha
\end{aligned}
$$

L'algorithme consiste à retrancher progressivement les différents termes à 119029.

	119029	345	on cherche c tel que c^2 soit juste inférieur à 11, c'est 3, on place 3
on retire 90000	- 90000		
	29029	6•×• = • est donc 4 64×4 = 256	on cherche d tel que (2×10×c+d)×d soit proche de 290 pour cela on double 3 et on cherche d d est 4, on place 4 à côté du 3 sur la première ligne
on retire 25600	- 25600		
	3429	68•×• = • est donc 5 685×5 = 3425	on cherche u tel que [2×(100c+10d)+u]×u soit proche de 3429 pour cela on double 34 et on cherche u u est le chiffre 5, on place 5 en position unité sur la première ligne
on retire 3425	- 3425		
	4		α est égal à 4

On peut donc conclure 119029 = 3425^2 + 4

4.2. ANNEXE 2 : Glossaire pour lire le texte original

AINS : mais
AME : unité de capacité pour les tonneaux
APPERT : apparaît, devient visible
ARPENT : Ancienne mesure agraire divisée en 100 perches, variable selon les localités de 35 à 50 ares unité agraire (pour mesurer la "capacité" des terres), puis unité de longueur et de superficie.
AUNE : unité de longueur utilisée pour les tissus. Mesure de longueur, variable selon les localités (valant 1,188 m à Paris)
AUTREFOIS : très souvent utilisé dans ce texte, avec le sens de "une fois de plus" ou "de même"
BRIEF : "en brief" pour "en résumé" et "de brief" pour "bientôt"
CIFFRE : chiffre
COMBIEN QUE : quoique
COMPUTATATIONS : calculs (le mot computer est bien français !)
CORPS : volume
DEBURA (ce qui se) : ce qui se devra
DEFAUT : "il défaut" pour "il manque"
DEPECHER : contraire de empêcher, prendre au piège ; dépêcher, c'est libérer, avec une idée de rapidité ; ici, dépêcher les calculs, c'est les mener à bien, rapidement
ESMEU : ?? (ému ?)
EXPEDIER : même idée que dépêcher, c'est dégager des entraves d'un piège, avec une idée de rapidité, le faire vite pour s'en débarrasser
FESTU : chose de peu de valeur (cf fêtu de paille)
GAUJEUR : celui qui jauge les tonneaux (en mesure la capacité au moyen d'une jauge)
GETTONS : jetons, qui servaient à faire des opérations sur table (le jeton ne prend sa valeur que par la place qu'il occupe sur la table ; cette table s'appelait "abaque" ; les gens qui calculaient avec des jetons, des "abacistes")
IMBECILLITE : faiblesse (pas de nuance péjorative)
METIER : "avoir métier de" pour "avoir besoin de" ; "être de métier" pour "être nécessaire"
MOLESTE : pénible, désagréable
MULTINOMIE : ?
MULTITUDE nombre de multitude des signes ?
NOISE : querelle, dispute
PARTIR : partager
PIEDS : ancienne mesure de longueur (32,5 cm)
PHILAUTIE : complaisance pour soi-même, présomption
PROGRESSION : "dixième progression" correspond à la numération décimale de position ; voir aussi "soixantième progression
QUELQUE : quelconque dans la phrase "je décris quelque nombre"
ROMPU : fraction de l'unité

SI : se construit avec un subjonctif quand la supposition est irréelle ou éventuelle : "si le signe fût inégal" pour "si le signe était inégal"
SIGNER : marquer
STEREOMETRIE : art de mesurer les volumes. Partie de la géométrie qui traite des solides
VERGE : unité de longueur et de superficie. Ancienne mesure agraire valant le quart d’un arpent.